Retomada de Progressão Geométrica (P.G)

Definição

Razão

Classificação

Termo Geral

Propriedades

Soma dos termos da P.G. finita

Soma dos termos da P.G. infinita

Definição:

Definição: É uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é resultado da multiplicação do termo anterior por uma constante ***q***, denominada como razão da **PG**

Exemplo:

Vamos determinar os cinco primeiros termos de uma PG de razão 3 e o primeiro termo 2.

Os termos da sequência são representados por $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$.

$a_1 = 2$
$a_2 = 2 \cdot 3 = 6$
$a_3 = 6 \cdot 3 = 18$
$a_4 = 18 \cdot 3 = 54$
$a_5 = 54 \cdot 3 = 162$

A PG do exemplo é, portanto, (2, 6, 18, 54, 162...)

Vale lembrar que a razão de uma PG é sempre constante e pode ser qualquer número racional (positivos, negativos, frações) exceto o número zero (0).

Razão de uma **P.G.**

A **razão de uma PG** pode ser encontrada a partir da **divisão de um termo da sequência pelo seu antecessor**. Ao fazer isso, caso ela seja realmente uma progressão geométrica, essa divisão sempre será igual a *q*.

Exemplo. Dada a P.G. (2, 8, 32, 128, 512, ...) determine a razão.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow q = 4 \qquad q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{32}{8} = 4 \rightarrow q = 4$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{128}{32} = 4 \rightarrow q = 4 \qquad q = \frac{a_5}{a_4} = \frac{512}{128} = 4 \rightarrow q = 4$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Classificação de uma P.G.

Crescente

Decrescente

Alternada

Constante

Classificação de uma P.G.

P.G. crescente:

Caso 1 $a_1 > 0\ (positivo) e\ q > 1$

(3, 6, 12, 24,...) $q = \frac{6}{3}, \frac{12}{6}, \ldots = 2$

P.G. crescente q = 2

Caso 2 $a_1 < 0\ (negativo) e\ 0 < q < 1$

(-54, -18, -6, -2, ...)

P.G. crescente $\mathrm{q} = \frac{1}{3}$

Classificação de uma P.G.

P.G. decrescente:

Caso 1 $\boldsymbol{a_1 > 0\ (positivo) e\ 0 < q < 1}$ (razão entre 0 e 1)

$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right) > \boldsymbol{q = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} =, \dots = \frac{1}{3}}$

P.G. decrescente sendo $\boldsymbol{a_1}$ =1 q = $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

Caso 2 $\boldsymbol{a_1 < 0\ (negativo) e\ 0\ \ q > 1}$ (razão maior que 1)

(-54, -108, -216, -432, ...) $> \boldsymbol{q = \frac{-108}{-54}, = \frac{-216}{-108} =, \dots = 2}$

P.G. decrescente sendo $\boldsymbol{a_1}$ =-54 q = $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

Classificação de uma P.G.

P.G. constante:

Exemplo 3: (3, 3, 3, 3, ...) P.G. constante de razão q = 1

q= $\frac{3}{3} = \frac{3}{3} = \cdots \mathbf{1}$

P.G. alternada

Exemplo 4: (5, -10, 20, -40, 80,...) P.G. alternada de razão q = -2

Termo Geral de uma P.G.

Sendo uma P.G $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n)$, vamos determinar o termo geral.

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Determine o 5° termo de uma P.G. com $a_1 = 4$ e $q = 3$.

PG: (4, 12, 36,108...)

$$a_n = a1.q^{(n-1)}$$

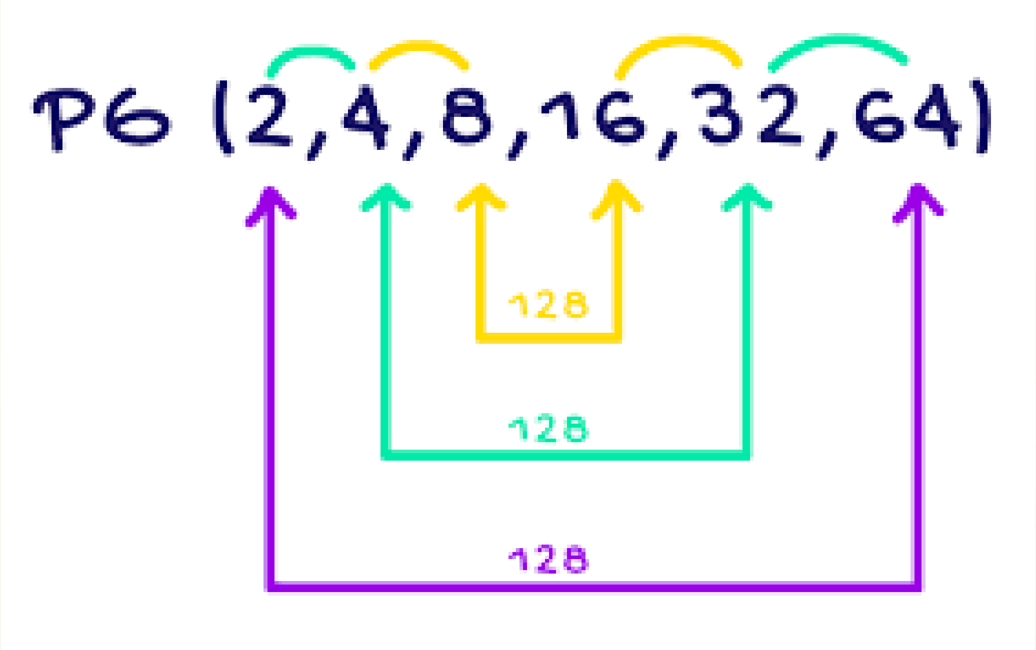
$$a_5 = 4.3^{(5-1)}$$

$$a_5 = 4.3^4$$

$$a_5 = 324$$

Propriedades de uma P.G.

- **1.ª propriedade**
- *Numa PG finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.*
- Observe a P.G. (2, 4, 8, 16, 32, 64)



Propriedades de uma P.G.

- **2.ª propriedade**
- *Em uma PG, tomando-se três termos consecutivos, o termo central é a média geométrica dos seus vizinhos.*
- Dada a P.G. (1, 3, 9, 27, 81, 243), observe a média geométrica.

termo central

$$\text{PG }(1, \underbrace{3, 9, 27}_{\text{termos escolhidos}}, 81, 243)$$

$$MG = \sqrt{3 \cdot 27}$$

$$MG = \sqrt{81}$$

$$MG = 9$$

Propriedades de uma P.G.

- **3.ª propriedade**
- Numa P.G. com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

Observe a P.G. (3, 6, 12,)

$6^2 = 3 \cdot 12$

36 = 36

Soma dos termos da P.G. finita

- $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

$S_n = Soma\ dos\ N\ termos\ de\ uma\ PG\ finita$

$a_1 = primeiro\ termo$

$q = razão\ da\ P.G$

$n = número\ de\ termos\ da\ P.G$

Soma dos termos da P.G. finita

Exemplo: Dada a P.G. (3, 6, 12, 24, 48), calcule a soma dos cinco primeiros termos da P.G.

Dados do problemas: $a_1 = 3,\ q = 2,\ n = 5,\ S_n = ?$

Aplicando em $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

$$S_5 = \frac{3 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1}$$

$$S_5 = \frac{3 \cdot (32 - 1)}{1}$$

$$S_5 = 3 \cdot 31$$

$$S_5 = 93$$

Soma dos termos da P.G. infinita

- $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$

$S_n = Soma\ dos\ N\ termos\ de\ uma\ PG\ infinita$
$a_1 = primeiro\ termo$
$q = razão\ da\ P.G$

Exemplo: Determine a **soma dos termos da PG infinita** na qual o primeiro termo é 2 e a razão é meio.

$$(2, 1, \frac{1}{2}, \dots)$$

$$S_\infty = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = \frac{2}{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = 2 \cdot \frac{2}{1} = 4$$

Soma dos termos da P.G. infinita

- $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, com com 0 < q < 1, a razão da PG deve pertencer ao intervalo entre zero e 1

$S_n = Soma\ dos\ N\ termos\ de\ uma\ PG\ infinita$
$a_1 = primeiro\ termo$
$q = razão\ da\ P.G$

Exemplo: Determine a **soma dos termos da PG infinita** na qual o primeiro termo é 2 e a razão é meio.

$$(2, 1, \frac{1}{2}, \dots)$$

$$S_\infty = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{2}{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = 2 \cdot \frac{2}{1} = 4$$